

Lösungen zu den Übungen aus Kapitel 21

- (1) Berechnen sie die Werte der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(Y=1|X=x)$ für $\beta_0 = 0,2$, $\beta_1 = 1,2$ und $x = 3$.

Hierzu setzt man die Werte der β -Koeffizienten und den x -Wert in folgende Gleichung ein:

$$P(Y=1|X=x) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot x}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot x}}$$

und erhält:

$$P(Y=1|X=3) = \frac{e^{0,2+1,2 \cdot 3}}{1 + e^{0,2+1,2 \cdot 3}} = \frac{e^{3,8}}{1 + e^{3,8}} = \frac{44,70}{45,70} = 0,98.$$

- (2) Berechnen Sie anhand des Beispiels in Abschnitt 21.1.2 (a) die bedingte Wahrscheinlichkeit, mit dem Leben zufrieden zu sein, (b) den bedingten Wettquotienten sowie (c) den bedingten Logit für Personen, die
- (a) kein positives, aber 30 negative Tagesereignisse angegeben haben,
 - (b) kein negatives, aber 30 positive Tagesereignisse angegeben haben,
 - (c) 30 positive und 15 negative Tagesereignisse angegeben haben.

In dem Beispiel wurden die Regressionskoeffizienten des logistischen Regressionsmodells für die Variablen »positive Tagesereignisse« (X_1) und »negative Tagesereignisse« (X_2) wie folgt geschätzt:

$$\hat{P}(Y|X_1, X_2) = \frac{e^{0,449+0,083 \cdot X_1 - 0,123 \cdot X_2}}{1 + e^{0,449+0,083 \cdot X_1 - 0,123 \cdot X_2}}$$

- (a) Für Personen, die kein positives ($X_1 = 0$), aber 30 negative Lebensereignisse ($X_2 = 30$) angegeben haben, erhält man:

$$\hat{P}(Y|X_1 = 0, X_2 = 30) = \frac{e^{0,449+0,083 \cdot 0 - 0,123 \cdot 30}}{1 + e^{0,449+0,083 \cdot 0 - 0,123 \cdot 30}} = \frac{e^{-3,241}}{1 + e^{-3,241}} = \frac{0,039}{1,039} = 0,038$$

$$\frac{\hat{P}(Y|X_1 = 0, X_2 = 30)}{1 - \hat{P}(Y|X_1 = 0, X_2 = 30)} = \frac{0,038}{0,962} = 0,040$$

$$\ln\left(\frac{\hat{P}(Y|X_1 = 0, X_2 = 30)}{1 - \hat{P}(Y|X_1 = 0, X_2 = 30)}\right) = \ln\left(\frac{0,038}{0,962}\right) = -3,219$$

- (b) Für Personen, die kein negatives ($X_2 = 0$), aber 30 positive Lebensereignisse ($X_1 = 30$) angegeben haben, erhält man:

$$\hat{P}(Y|X_1 = 30, X_2 = 0) = \frac{e^{0,449+0,083 \cdot 30 - 0,123 \cdot 0}}{1 + e^{0,449+0,083 \cdot 30 - 0,123 \cdot 0}} = \frac{e^{2,939}}{1 + e^{2,939}} = \frac{18,897}{19,897} = 0,950$$

$$\frac{\hat{P}(Y|X_1 = 30, X_2 = 0)}{1 - \hat{P}(Y|X_1 = 30, X_2 = 0)} = \frac{0,950}{0,050} = 19$$

$$\ln\left(\frac{\hat{P}(Y|X_1 = 30, X_2 = 0)}{1 - \hat{P}(Y|X_1 = 30, X_2 = 0)}\right) = \ln\left(\frac{0,950}{0,050}\right) = 2,944$$

(c) Für Personen, die 30 positive ($X_1 = 30$) und 15 negative Lebensereignisse ($X_2 = 15$) angegeben haben, erhält man:

$$\hat{P}(Y|X_1 = 30, X_2 = 15) = \frac{e^{0,449+0,083 \cdot 30 - 0,123 \cdot 15}}{1 + e^{0,449+0,083 \cdot 30 - 0,123 \cdot 15}} = \frac{e^{1,094}}{1 + e^{1,094}} = \frac{2,986}{3,986} = 0,749$$

$$\frac{\hat{P}(Y|X_1 = 30, X_2 = 15)}{1 - \hat{P}(Y|X_1 = 30, X_2 = 15)} = \frac{0,749}{0,251} = 2,984$$

$$\ln\left(\frac{\hat{P}(Y|X_1 = 30, X_2 = 15)}{1 - \hat{P}(Y|X_1 = 30, X_2 = 15)}\right) = \ln\left(\frac{0,749}{0,251}\right) = 8,001$$

(3) Zeigen Sie, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(Y = 1|X = x)$ gleich 0,5 ist, wenn gilt: $x = -\beta_0/\beta_1$.

Setzt man den Wert $x = -\beta_0/\beta_1$ in die Modellgleichung ein, erhält man:

$$P(Y = 1|X = x) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot (-\beta_0/\beta_1)}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot (-\beta_0/\beta_1)}} = \frac{e^{\beta_0 + (-\beta_0)}}{1 + e^{\beta_0 + (-\beta_0)}} = \frac{e^0}{1 + e^0} = \frac{1}{1 + 1} = 0,5.$$

(4) Zeigen Sie, dass Gleichung F 21.3 aus Gleichung F 21.1 folgt.

Aufgrund der Gleichung $P(Y = 1|X = X) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot X}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot X}}$ (F 21.1) erhält man für die bedingte Wettquotientenfunktion: (F 21.3):

$$\begin{aligned} \frac{P(Y = 1|X = X)}{1 - P(Y = 1|X = X)} &= \frac{\frac{e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot X}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot X}}}{\frac{e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot X}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot X}}} = \frac{\frac{e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot X}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot X}}}{\frac{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot X} - e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot X}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot X}}} \\ &= \frac{\frac{e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot X}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot X}}}{\frac{1}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot X}}} = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot X}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot X}} \cdot \frac{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot X}}{1} = e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot X} \end{aligned}$$

(5) Zeigen Sie, dass Gleichung F 21.7 aus Gleichung F 21.3 folgt.

Logarithmiert man beide Seiten der Gleichung $\frac{P(Y = 1|X = X)}{1 - P(Y = 1|X = X)} = e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot X}$ (F 21.1) erhält man nach den Rechenregeln für Logarithmen:

$$\ln\left(\frac{P(Y = 1|X = X)}{1 - P(Y = 1|X = X)}\right) = \ln(e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot X}) = \beta_0 + \beta_1 \cdot X$$

(6) Zeigen Sie, dass Gleichung F 21.32 gültig ist.

Ersetzt man in Gleichung F 21.32 $\beta_{0i+1} - \beta_{0i} = \ln\left(\frac{P(Y \leq i+1|X = x)}{P(Y > i+1|X = x)}\right) - \ln\left(\frac{P(Y \leq i|X = x)}{P(Y > i|X = x)}\right)$ die bedingten Logits nach Gleichung F21.31 erhält man:

$$\beta_{0i+1} - \beta_{0i} = \beta_{0(i+1)} + \beta_1 \cdot x - \beta_{0i} - \beta_1 \cdot x = \beta_{0(i+1)} - \beta_{0i}$$

(7) Zeigen Sie, dass Gleichung F 21.33 gültig ist.

Gleichung F 21.33 folgt unmittelbar aus Gleichung F 21.32, da gilt:

$$P(Y \leq i+1 | X = x) = P(Y \leq i | X = x) + P(Y = i+1 | X = x) \quad \text{sowie} \\ P(Y > i+1 | X = x) = P(Y > i | X = x) - P(Y = i+1 | X = x)$$